高等电动力学笔记 02：格林函数，并矢格林函数

黄俊涵

2022 年 4 月 19 日

傅立叶变换（注意这边与我们常用的定义是相反的）

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,\ \mathcal{F}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{i\omega t}dt \tag{1}$$

宏观 Maxwell 方程：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)&=0\\ \nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t)&=\rho(\mathbf{r},t)\\ \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)&=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\\ \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)&=\mathbf{j}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{r},t)\end{aligned}$$

对上述四条方程做傅立叶变换（根据我们定义的傅立叶变换，在使用求导定理时要注意符号）

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathcal{B}(\mathbf{r},\omega)&=0\\ \nabla\cdot\mathcal{D}(\mathbf{r},\omega)&=\rho(\mathbf{r},\omega)\\ \nabla\times\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega)&=i\omega\mathcal{B}(\mathbf{r},\omega)\\ \nabla\times\mathcal{H}(\mathbf{r},\omega)&=\mathcal{J}(\mathbf{r},\omega)-i\omega\mathcal{D}(\mathbf{r},\omega)\end{aligned}$$

线性材料频域下的本构关系可以写为

$$\mathcal{D}(\omega)=\overleftrightarrow{\epsilon}(\omega)\mathcal{E}(\omega)+\overleftrightarrow{\xi}(\omega)\mathcal{H}(\omega) \tag{2}$$

$$\mathcal{B}(\omega)=\overleftrightarrow{\eta}(\omega)\mathcal{E}(\omega)+\overleftrightarrow{\mu}(\omega)\mathcal{H}(\omega) \tag{3}$$

可以定义下面的张量

$$\overleftrightarrow{K}(\omega)\equiv\begin{bmatrix}\overleftrightarrow{\epsilon}(\omega) & \overleftrightarrow{\xi}(\omega)\\ \overleftrightarrow{\eta}(\omega) & \overleftrightarrow{\mu}(\omega)\end{bmatrix} \tag{4}$$

引入本构关系后，可以将宏观 Maxwell 方程写成如下形式（当然，还有两条散度方程）

$$(\overleftrightarrow{D}-i\omega\overleftrightarrow{K})\mathbf{e}=-\mathbf{J} \tag{5}$$

其中

$$\overleftrightarrow{D}=\begin{bmatrix}0 & -\nabla\times\\ \nabla\times & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{e}=\begin{bmatrix}\mathcal{D}(\omega)\\ \mathcal{B}(\omega)\end{bmatrix},\ \mathbf{J}=\begin{bmatrix}\mathcal{J}(\mathbf{r},\omega)\\ 0\end{bmatrix} \tag{6}$$

如果只考虑体系的 ϵ，($\mu = \mu_0$)，宏观 Maxwell 方程可以写为

$$\left(\nabla \times (\nabla \times) - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r(\mathbf{r},\omega)\right)\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega) = i\omega\mu_0\mathcal{J}_f(\mathbf{r},\omega) \tag{7}$$

更普遍地，我们考虑如下形式的方程

$$(\mathcal{L} - \lambda\rho(\mathbf{r}))u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \tag{8}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是某个线性微分算子，$u(\mathbf{r})$ 是待求解的场。对应于这条方程的格林函数定义为

$$(\mathcal{L} - \lambda\rho(\mathbf{r}))g(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{9}$$

这是标量形式的方程和格林函数。我们研究的电磁波是矢量，因此矢量形式的微分方程为

$$(\mathcal{L} - \lambda \overleftrightarrow{\rho}(\mathbf{r}))\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \tag{10}$$

相应的格林函数则应该写成并矢形式

$$(\mathcal{L} - \lambda \overleftrightarrow{\rho}(\mathbf{r}))\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \overleftrightarrow{I}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{11}$$

因为格林函数表示的是对“源”的某种响应形式，因此在矢量情况下把格林函数写成并矢是自然的。对式 (19) 两边同乘 $f(\mathbf{r}')$ 并对全空间积分

$$\int(\mathcal{L} - \lambda \overleftrightarrow{\rho}(\mathbf{r}))\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = (\mathcal{L} - \lambda \overleftrightarrow{\rho}(\mathbf{r}))\int\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = \int\overleftrightarrow{I}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = f(\mathbf{r}) \tag{12}$$

不难看出

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' \tag{13}$$

于是所有的问题都转化为了对（并矢）格林函数的求解。同时我们可以看到，格林函数是不依赖于源的具体形式的，只跟方程的形式，即体系有关（$\mathcal{L}$，$\overleftrightarrow{\rho}$）。格林函数可以理解为按照某种规则对空间源的分布进行求和，所有的响应叠加起来就是我们要求解的场。

简单例子:

对于静电情况，真空中的电势满足

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \tag{14}$$

格林函数

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{15}$$

由公式

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \tag{16}$$

可以得到

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{17}$$

于是

$$\Phi = \int\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' \tag{18}$$

这就是库仑定律。

出于简单，我们考虑三维空间中的各向同性介质。Maxwell 方程为

$$\left(\nabla\times\nabla\times -k^2\right)\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega)=i\mu\omega\mathcal{J}(\mathbf{r},\omega) \tag{19}$$

其中 $k=\dfrac{\omega}{c/n}$。并矢格林函数定义为

$$\left(\nabla\times\nabla\times -k^2\right)\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\overleftrightarrow{I}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{20}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega)=i\mu\omega\int\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' \tag{21}$$

$\nabla\times\nabla\times$ 这个算符是不好处理的，因此我们一般从洛伦兹规范下的标量波动方程出发。记得，将表势和矢势根据定义带入 Maxwell 方程组后，可以得到

$$\nabla^2\Phi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})=-\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{22}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}-\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\mathbf{j} \tag{23}$$

洛伦兹规范为

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \tag{24}$$

在洛伦兹规范下，标势和矢势都满足波动方程（为了包括介质中的情况，此处已经将 ϵ_0,μ_0 换成了 ϵ,μ）

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=-\mu\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{25}$$

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(\mathbf{r},t)=-\frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon} \tag{26}$$

傅立叶变换后

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\mathcal{A}(\mathbf{r},\omega)=-\mu\mathcal{J}(\mathbf{r},\omega) \tag{27}$$

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\Phi(\mathbf{r},t)=-\frac{\rho(\mathbf{r},\omega)}{\epsilon} \tag{28}$$

定义格林函数如下

$$\left(\nabla^2+k^2\right)G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{29}$$

注意，之前我们见到的格林函数，自变量都直接写成 $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$，即 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$。但实际上这只在线性微分算符与空间无关的情况下成立。考虑简单的情况，$\mathcal{A}$ 和 Φ 为

$$\mathcal{A}(\mathbf{r},\omega)=\mu\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}',\ \Phi(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{\epsilon}\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' \tag{30}$$

然后进一步得到电场和磁场

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega)=i\omega\mathcal{A}-\nabla\Phi,\ \mathcal{H}(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathcal{A} \tag{31}$$

电场可以写为

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega)=i\omega\mu\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}'-\frac{1}{\epsilon}\nabla\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' \tag{32}$$

由频域下的电荷守恒

$$\nabla\cdot \mathcal{J}(\mathbf{r},\omega) - i\omega\rho(\mathbf{r},\omega) = 0 \tag{33}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega) = i\omega\mu\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' - \frac{1}{\epsilon}\nabla\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{1}{i\omega}\nabla'\cdot \mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' \tag{34}$$

利用公式 $\nabla\cdot(f\mathbf{a}) = \nabla f\cdot \mathbf{a} + f\nabla\cdot \mathbf{a}$,

$$\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{1}{i\omega}\nabla'\cdot \mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' = \int \frac{1}{i\omega}\{\nabla'\cdot(G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)) - \mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)\cdot\nabla' G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\}d^3\mathbf{r}' \tag{35}$$

前面一项可以用高斯定理 $\int_V d\tau\nabla\cdot \mathbf{A} = \oint_S d\mathbf{S}\cdot \mathbf{A}$ 化为面积分，并且运用边界条件（格林函数在无穷远处趋于 0）消去，因此电场化为

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega) = i\omega\mu\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{i\omega\epsilon}\nabla\int \mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)\cdot\nabla' G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' \tag{36}$$

注意到 $\nabla' G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\nabla G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$，$k = w\sqrt{\epsilon\mu}$，于是得到

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega) = i\omega\mu\int \left\{G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\overset{\leftrightarrow}{I} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\}\mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' \tag{37}$$

从而得到并矢格林函数

$$\overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left(\overset{\leftrightarrow}{I} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{38}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r},\omega) = i\omega\mu\int \overset{\leftrightarrow}{G}(\nabla,\nabla')\mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' \tag{39}$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r},\omega) = \int \nabla\times\overset{\leftrightarrow}{G}(\nabla,\nabla')\mathcal{J}(\mathbf{r}',\omega)d^3\mathbf{r}' \tag{40}$$

我们已经知道，标量格林函数为

$$G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{41}$$

$\boxed{-}$container 在球坐标系下推导三维标量格林函数

将原点移动到 $\mathbf{r}'$ 处

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)G_0(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) = -\frac{\delta(r)\delta(\theta)\delta(\phi)}{r^2\sin\theta} \tag{42}$$

分离变量 $G_0(\mathbf{r}) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)R(r)$，由对称性容易知道只与 r 有关，并利用到

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2}\delta(r) \tag{43}$$

径向方程化为

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2r^2R = -\delta(r) \tag{44}$$

解可以取为 0 阶汉克尔函数 $h_0^{(1)}(kr)$，$h_0^{(2)}(kr)$

$$R(r) = A\ h_0^{(2)}(kr) + Bh_0^{(1)}(kr) = A\frac{e^{ikr}}{kr} + B\frac{e^{-ikr}}{kr} \tag{45}$$

注意到无穷远处的渐进行为

$$kr\to\infty,\ h^{(1)(2)} = \frac{\exp\left[\mp i\left(kr - \frac{n\pi}{2}\right)\right]}{kr} \tag{46}$$

分别对应于向内和向外传播的球面波，因此我们这里只取 $h_0^{(2)}(kr)$，$R(r)=A\frac{e^{ikr}}{kr}$. 为了确定系数 A，只需要带回原方程并积分。。。。。

并矢格林函数的具体形式

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)=\left(\overleftrightarrow{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\frac{e^{ikR}}{4\pi R} \tag{47}$$

$$=\frac{k}{4\pi}\left(\frac{e^{ikR}}{kR}\overleftrightarrow{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\left(e^{ikR}\nabla\frac{1}{kR}+\frac{\mathbf{R}}{R}ike^{ikR}\frac{1}{kR}\right)\right) \tag{48}$$

$$=\frac{k}{4\pi}\left\{\frac{e^{ikR}}{kR}\overleftrightarrow{I}+\frac{1}{k^2}\left[e^{ikR}\nabla\nabla\left(\frac{1}{kR}\right)+\frac{ik\mathbf{R}}{R}e^{ikR}\nabla\left(\frac{1}{kR}\right)+\nabla\left(\frac{ie^{ikR}}{R^2}\mathbf{R}\right)\right]\right\} \tag{49}$$

$$\nabla\left(\frac{ie^{ikR}}{R^2}\mathbf{R}\right)=\nabla\left(\frac{ie^{ikR}}{R^2}\right)\mathbf{R}+\frac{ie^{ikR}}{R^2}\nabla\mathbf{R}$$
$$=-ke^{ikR}\frac{\mathbf{RR}}{R^3}+ie^{ikR}\left(-\frac{2\mathbf{R}}{R^4}\right)\mathbf{R}+\frac{ie^{ikR}}{R^2}\overleftrightarrow{I}$$
$$\frac{ik\mathbf{R}}{R^2}e^{ikR}\nabla\left(\frac{1}{kR}\right)=\frac{i\mathbf{R}}{R^2}e^{ikR}\left(-\frac{\mathbf{R}}{R^2}\right)$$

故

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)=\frac{k}{4\pi}\left\{\frac{e^{ikR}}{kR}\overleftrightarrow{I}+\frac{1}{k^2}e^{ikR}\left[\nabla\nabla\left(\frac{1}{kR}\right)-k\frac{\mathbf{RR}}{R^3}-\frac{3i\mathbf{RR}}{R^4}+\frac{i}{R^2}\overleftrightarrow{I}\right]\right\} \tag{50}$$

我们有

$$\nabla\nabla\frac{1}{r}=-\frac{4\pi}{3}\delta(\mathbf{r})\overleftrightarrow{I}+\frac{1}{r^3}\left(\frac{3\mathbf{rr}}{r^2}-\overleftrightarrow{I}\right) \tag{51}$$

因此

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)=\frac{k}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{kR}\left[\overleftrightarrow{I}\left(1-\frac{4\pi}{3k^2}\delta(\mathbf{R})-\frac{1}{k^2R^2}+\frac{i}{kR}\right)+\frac{\mathbf{RR}}{R^2}\left(\frac{3}{k^2R^2}-1-\frac{3i}{kR}\right)\right] \tag{52}$$

定义下列函数

$$A(x)=e^{ix}\left(x^{-1}+ix^{-2}-x^{-3}\right),\ B(x)=e^{ix}\left(-x^{-1}-3ix^{-2}+3x^{-3}\right) \tag{53}$$

于是

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)=-\frac{1}{3k^2}\delta(\mathbf{R})\overleftrightarrow{I}+\frac{k}{4\pi}\left[\overleftrightarrow{I}A(kR)+\frac{\mathbf{RR}}{R^2}B(kR)\right] \tag{54}$$

根据 $1/R$ 衰减的速度，我们可以将格林函数分为近场，中场，远场区域

$$\overleftrightarrow{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)=\overleftrightarrow{G}_{\mathrm{NF}}+\overleftrightarrow{G}_{\mathrm{IF}}+\overleftrightarrow{G}_{\mathrm{FF}}$$
$$\overleftrightarrow{G}_{\mathrm{NF}}=\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\frac{1}{k^2R^2}\left(-\overleftrightarrow{I}+\frac{3\mathbf{RR}}{R^2}\right)$$
$$\overleftrightarrow{G}_{\mathrm{IF}}=\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\frac{i}{kR}\left(\overleftrightarrow{I}-\frac{3\mathbf{RR}}{R^2}\right)$$
$$\overleftrightarrow{G}_{\mathrm{FF}}=\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\left(\overleftrightarrow{I}-\frac{\mathbf{RR}}{R^2}\right)$$

应用：对于放置于 $\mathbf{r}_0$ 的点电偶极子，其电荷密度可以写为

$$\rho(\mathbf{r})=-\mathbf{p}\cdot\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \tag{55}$$